Einführung in die moderne Teilchenphysik

Dr. Stefan Schael
Max-Planck Institut für Physik
Werner Heisenberg Institut
Föhringer Ring 6
D-80805 München

1. Das Standardmodell der Teilchenphysik
2. Teilchenbeschleuniger & Teilchendetektoren
3. Erhaltungssätze und Symmetrien
4. Die elektroschwache Wechselwirkung
5. Das Top Quark
6. Physik mit B-Hadronen
7. CP Verletzung
8. Das ATLAS Experiment
9. Neutrinos
10. Grenzen des Standardmodells

Literatur:

- O. Nachtmann, “Elementarteilchenphysik”, Vieweg.
- F. Halzen, A.D. Martin, “Quarks & Leptons”, An Introductory Course in Modern Particle Physics, John Wiley & Sons, Inc.

ftp:
afmp02.mppmu.mpg.de:/pub/stefan/augsburg_ss98/

Einleitung

klassische Mechanik:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p}{2m}$$

Quantenmechanik:

$$\vec{p} \Rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \qquad E \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x},t)$$

mit der Lösung (ebene Wellen):

$$\Psi(\vec{x},t) = A \cdot e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E\cdot t)}$$

Für ein Teilchen im äußeren Potential $V(\vec{x})$ gilt:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\Psi(\vec{x},t)$$

die Schrödinger Gleichung.

Zeitliche Änderungen von Operatoren

Für den Mittelwert von F gilt:

$$< F >= \int \Psi^*(\vec{r}, t)\hat{F}\Psi(\vec{r}, t)d\vec{r} =< \Psi|\hat{F}\Psi >$$

und damit für die zeitliche Änderung:

$$\frac{d}{dt} < F >= \int \left[\Psi^* \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\hat{F}\Psi + \Psi^* \hat{F}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right] d\vec{r}$$

mit der Schrödinger Gleichung ($\hat{H} = \hat{H}^\dagger$):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\Psi^*$$

folgt:

$$\frac{d}{dt} < F >= \int \Psi^* \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}(\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F})\right) \Psi d\vec{r}$$

Durch die Definition:

$$\frac{d}{dt} < F >:= \int \Psi^* \left(\widehat{\frac{dF}{dt}}\right) \Psi d\vec{r}$$

gilt:

$$\boxed{\left(\widehat{\frac{dF}{dt}}\right) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}].}$$

$$\boxed{\widehat{\left(\frac{dF}{dt}\right)} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}]}$$

Hängt also der Operator $\hat{F}$ nicht explizit von der Zeit ab und ist $\hat{F}$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ vertauschbar, so ändert sich der zeitliche Mittelwert von $\hat{F}$ in einem beliebigen Zustand nicht.

Solche Größen sind Erhaltungsgrößen.

Beispiel: Impuls

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(\frac{dp}{dt}\right)} &= \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \hat{H}] \\
&= \frac{1}{i\hbar}(\hat{p}\hat{H} - \hat{H}\hat{p}) \\
&= \frac{1}{i\hbar}(\hat{p}(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x})) - (\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x}))\hat{p})
\end{aligned}$$

Da $[\hat{p}, \hat{p}] = 0$ und $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(\frac{dp}{dt}\right)} &= \frac{1}{i\hbar}(\hat{p}V(\vec{x}) - V(\vec{x})\hat{p}) \\
&= \frac{1}{i\hbar}(-i\hbar\vec{\nabla}V(\vec{x}) + V(\vec{x})i\hbar\vec{\nabla}) \\
&= -\vec{\nabla}V(\vec{x}) + V(\vec{x})\vec{\nabla}
\end{aligned}$$

$$\widehat{\left(\frac{dp}{dt}\right)} = \frac{1}{i\hbar}(-\vec{\nabla}V + V\vec{\nabla})$$

$$-\vec{\nabla}(V\Psi) + V\vec{\nabla}\Psi = -(\vec{\nabla}V)\Psi - V\vec{\nabla}\Psi + V\vec{\nabla}\Psi$$
$$= (-\vec{\nabla}V)\Psi$$

$$\widehat{\left(\frac{dp}{dt}\right)} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$$

Für den Mittelwert gilt also:

$$\boxed{\left\langle \widehat{\left(\frac{dp}{dt}\right)} \right\rangle = \frac{d}{dt} < \vec{p} > = \left\langle -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \right\rangle .}$$

Die Ableitung des Mittelwertes des Impulses ist gleich dem Mittelwert der Kraft.

Newton: $F = \dot{p} = -\vec{\nabla}V$

Ehrenfest'sches Theorem:

Für die Mittelwerte physikalischer Größen gelten die Gesetze der klassischen Physik.

Invarianzprinzipien und Erhaltunssätze

Es gibt zwei Arten von Transformationen:

- **Kontinuierliche, z.B. Translation in Raum und Zeit**
- **Diskrete, z.b. Raumspiegelungen**

Translation im Raum

$$\begin{aligned}\hat{D}(\delta\vec{x})\Psi(\vec{x}) &= \Psi(\vec{x}+\delta\vec{x}) \\ &= \Psi(\vec{x}) + \delta\vec{x}\vec{\nabla}\Psi(\vec{x}) \\ &= \Psi(\vec{x}) + \frac{i}{\hbar}\delta\vec{x}\cdot\hat{p}\Psi(\vec{x})\end{aligned}$$

mit $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.

Für eine endliche Translation kann die TAYLOR-Entwicklung nicht nach dem ersten Glied abgebrochen werden:

$$\hat{D}(\Delta\vec{x})\Psi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\vec{x}\cdot\hat{p}\right)^n\Psi(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \hat{D}(\Delta\vec{x}) = e^{i\Delta\vec{x}\cdot\hat{p}/\hbar}$$

$\hat{D}$ ist ein unitärer Operator: $\hat{D}^*\hat{D} = \hat{D}^{-1}\hat{D} = 1$.

Wenn der Hamiltonoperator $\hat{H}$ unabhängig von räumlichen Translationen ist gilt:

$$[\hat{D}, \hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{p}, \hat{H}] = 0$$

d.h. Der Impuls des Systems ist erhalten.

Translation in der Zeit

$$\hat{T}(\delta t)\Psi(t) = \Psi(t+\delta t) = \Psi(t) + \delta t \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)$$
$$= \Psi(t) - \frac{i}{\hbar}\delta t \cdot \hat{E}\Psi(t)$$

mit $\hat{E} = i\hbar\partial/\partial t$.

Für eine endliche Translation kann die TAYLOR-Entwicklung nicht nach dem ersten Glied abgebrochen werden:

$$\hat{T}(\Delta t)\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta t \cdot \hat{E}\right)^n \Psi(t)$$

$$\Rightarrow \hat{T}(\Delta t) = e^{-i\Delta t \cdot \hat{E}/\hbar}$$

$\hat{T}$ ist ein unitärer Operator: $\hat{T}^*\hat{T} = \hat{T}^{-1}\hat{T} = 1$.

Wenn der Hamiltonoperator $\hat{H}$ unabhängig von zeitlichen Translationen ist gilt:

$$[\hat{T}, \hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{E}, \hat{H}] = 0$$

d.h. Die Energie des Systems ist erhalten.

Rotationen

$$\hat{R}(\delta\phi)\Psi(\phi) = \Psi(\phi + \delta\phi) = \Psi(\phi) + \delta\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\Psi(\phi)$$

$$= \Psi(\phi) + \frac{i}{\hbar}\delta\phi \cdot \hat{J}_z\Psi(\phi)$$

mit

$$J_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r \cdot \sin\theta\cos\phi, \quad y = r \cdot \sin\theta\sin\phi, \quad z = r \cdot \cos\theta$$

Für eine endliche Translation kann die TAYLOR-Entwicklung nicht nach dem ersten Glied abgebrochen werden:

$$\hat{R}(\Delta\phi)\Psi(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\phi \cdot \hat{J}_z\right)^n\Psi(\phi)$$

$$\Rightarrow \hat{R}(\Delta\phi) = e^{i\Delta\phi\cdot\hat{J}_z/\hbar}$$

$\hat{R}$ ist ein unitärer Operator: $\hat{R}^*\hat{R} = \hat{R}^{-1}\hat{R} = 1.$

Wenn der Hamiltonoperator $\hat{H}$ unabhängig von Rotationen um die z-Achse ist gilt:

$$[\hat{R}, \hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{J}_z, \hat{H}] = 0$$

d.h. Die Drehimpulserhaltung bezüglich einer Achse enspricht der Invarianz des Hamiltonoperators gegen Drehungen um diese Achse.

Symmertieüberlegungen führen zu Invarianzprinzipien und Erhaltungssätzen.

Dies stellt die Grundlage für viele Entwicklungen in der modernen Physik dar.

Die Forderung nach der Homogenität von Raum und Zeit

$$\begin{aligned} \hat{D}(\Delta\vec{x})\Psi(\vec{x}) &= \Psi(\vec{x}+\Delta\vec{x}) \; ; \quad [\hat{D},\hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{p},\hat{H}] = 0 \\ \hat{T}(\Delta t)\Psi(t) &= \Psi(t+\Delta t) \quad ; \quad [\hat{T},\hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{E},\hat{H}] = 0 \end{aligned}$$

führen zur Impuls- und Energieerhaltung. Die Forderung nach der Isotropie des Raumes

$$\hat{R}(\Delta\phi)\Psi(\phi) = \Psi(\phi+\Delta\phi); \quad [\hat{R},\hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{J}_z,\hat{H}] = 0$$

führen zur Drehimpulserhaltung.

Ladungserhaltung

Die Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ können als Ableitungen von vektoriellen und skalaren Potentialen $\vec{A}$ un Φ ausgedrückt werden:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind Eichinvariant:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha$$
$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\alpha \equiv 0$. α ist eine beliebige Funktion: $\alpha = \alpha(\vec{x}, t)$.

Im Vakuum genügt $\vec{A}$ der Wellengleichung:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

mit der Lösung

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}^0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

die der Ausbreitung freier masseloser Photonen entspricht.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi + \Phi_0$ ändert die Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ nicht.

These: Ladungen sind nicht erhalten.

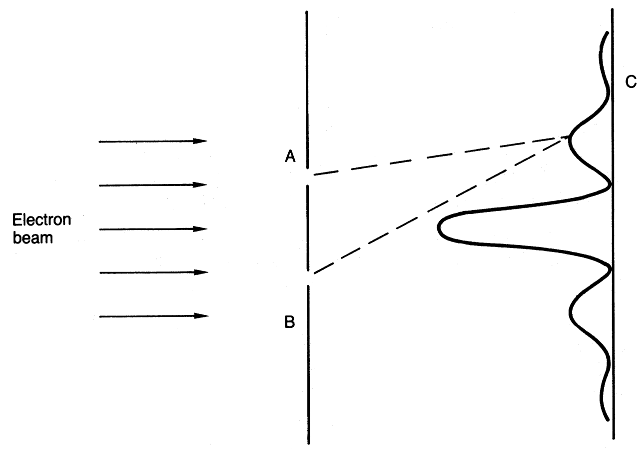
Dazu betrachten ein abgeschloßenes System:

Energie für die Erzeugung einer Ladung:	W_1
Für die Bewegung der Ladung von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$:	$Q(\Phi(\vec{a}) - \Phi(\vec{b}))$
Energie für die Vernichtung einer Ladung:	W_2
Energiegewinn:	$Q(\Phi(\vec{a}) - \Phi(\vec{b}))$

Kein physikalischer Prozess hängt von Φ_0 ab
$\Rightarrow W$ ist unabhängig von Φ
$\Rightarrow W_1 = -W_2$.

Dies wiederspricht der Energieerhaltung (Wigner 1949) !

Ein "einfaches" Beispiel zur Eichinvarianz:



Elektronwelle:

$$\Psi = e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)} = e^{ipx}$$

mit $p = (E, \vec{p})$ **und** $x = (t, \vec{x})$.

Wie ändern sich die Observablen bei der Transformation:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\alpha}\Psi \ ?$$

1. Versuch: Schrödinger Gleichung:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p}{2m}$$

$$\vec{p} \Rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \qquad\qquad E \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x}, t)$$

Dieser Ansatz ist nicht lorenzinvariant, da die Schrödinger Gleichung nicht symmetrisch in Orts- und Zeitableitungen ist.

2. Versuch: Klein-Gordan Gleichung:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\vec{p} \Rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \qquad E \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4)\Phi$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi = 0$$

mit

$$\hbar = c = 1$$

und

$$\partial_\mu := (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu := (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$$

$$\Rightarrow \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

führt dies auf:

$$\boxed{(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Phi = 0}$$

Φ ist die Wellenfunktion für ein Teilchen mit Spin 0, Elektronen sind Fermionen und haben Spin 1/2 und die Wellenfunktion:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{x}, t) \\ \Psi_2(\vec{x}, t) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen der Klein-Gordan Gleichung sind:

$$\Phi_{1,2} = Ae^{i(\vec{p}\vec{x} \pm Et)}$$

d.h. mit positiver und negativer Energie !

3. Versuch: Dirac-Gleichung (1928):

Wir machen einen linearen Ansatz:

$$\boxed{\{i\gamma^\mu \partial_\mu - m\}\,\Psi(x) = 0}$$

dabei ist der Dirac-Spinor Ψ

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

und γ^μ ein Vierervektor von γ-Matrizen:

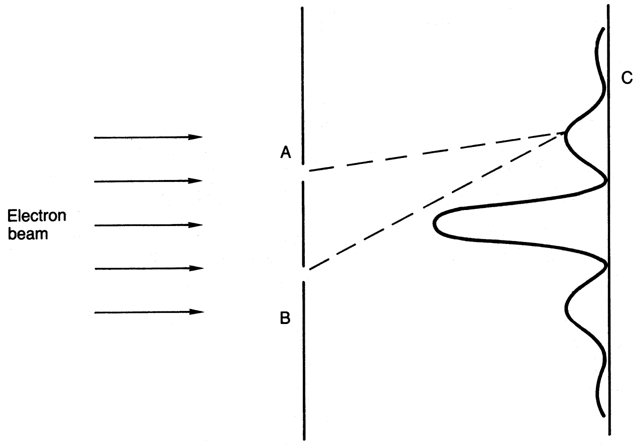
$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für unsere Überlegungen ist nur wichtig,
daß die Dirac-Gleichung linear in den Ableitungen ist !

d.h. es genügt das Transformationsverhalten von
$\partial_\mu \Psi$ zu untersuchen.

Ein "einfaches" Beispiel zur Eichinvarianz:



Elektronwelle:

$$\Psi = e^{i(\vec{p}\vec{x}-Et)} = e^{ipx}$$

mit $p = (E, \vec{p})$ und $x = (t, \vec{x})$.
Wie ändern sich die Observablen bei der Transformation:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\alpha}\Psi \ ?$$

Dazu müssen wir betrachten:

$$\partial_\mu e^{-i\alpha}\Psi = e^{-i\alpha}\partial_\mu\Psi$$

d.h. die Dirac-Gleichung ist invariant, da $\partial_\mu\alpha = 0$!
Dies ändert sich, wenn $\alpha = \alpha(x)$.

$$\partial_\mu e^{-i\alpha(x)}\Psi = i\partial_\mu\alpha(x)e^{-i\alpha(x)}\Psi + e^{-i\alpha(x)}\partial_\mu\Psi$$

d.h. die Dirac-Gleichung ist nicht invariant,
oder anschaulich da $\alpha = \alpha(x)$ ändert sich die Phasendifferenz zwischen A und B und damit das Beugungsmuster.

Die Elektronen sind geladen und wechselwirken über ein elektromagnetisches Potential $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$. Dies ändert den Elektronimpuls (siehe J.D. Jackson, "Elektrodynamik", S.685) :

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + eA_\mu$$

oder für die Operatoren:

$$\Rightarrow i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu + eA_\mu$$

d.h.

$$\boxed{\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu \equiv D_\mu}$$

Was ändert sich dadurch ?

$$D_\mu e^{-i\alpha(x)}\Psi = \left[D_\mu e^{-i\alpha(x)}\right]\Psi + e^{-i\alpha(x)}D_\mu\Psi$$

$$\begin{aligned} D_\mu e^{-i\alpha(x)} &= \partial_\mu e^{-i\alpha(x)} - ieA_\mu e^{-i\alpha(x)} \\ &= -e^{-i\alpha(x)} i\partial_\mu\alpha(x) - ieA_\mu e^{-i\alpha(x)} \\ &= -ie^{-i\alpha(x)}\left[\partial_\mu\alpha(x) + eA_\mu\right] \end{aligned}$$

dies ist aber genau die Eichfreiheit der Maxwell-Gleichungen:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

d.h.

$$D_\mu e^{-i\alpha(x)}\Psi = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\Psi$$

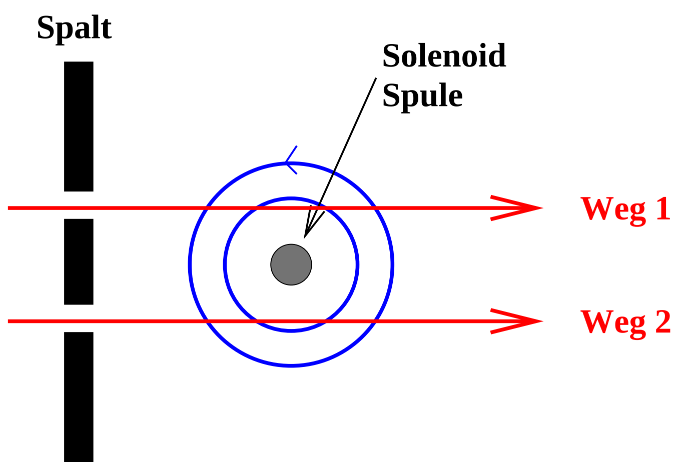
Damit wird die Dirac-Gleichung

$$\{i\gamma^\mu D_\mu - m\}\,\Psi(x) = 0$$
$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\,\Psi(x) = 0$$

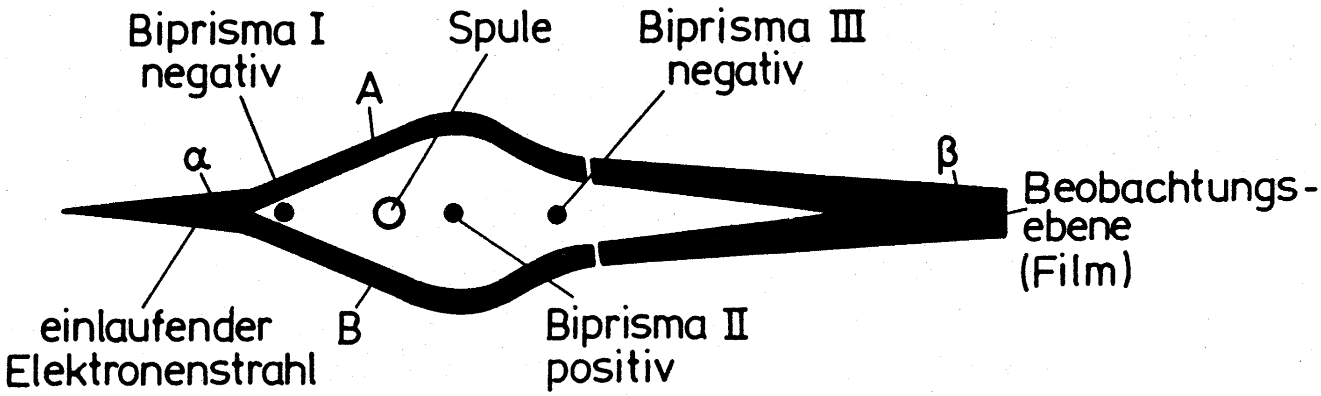
lokal Eichinvariant !

Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz der Wellenfunktion erzwingt die Existenz eines langreichweitigen Vektorfeldes A_μ (das Photonfeld) und legt damit die Struktur der Quantenfeldtheorie der Elektrodynamik fest.

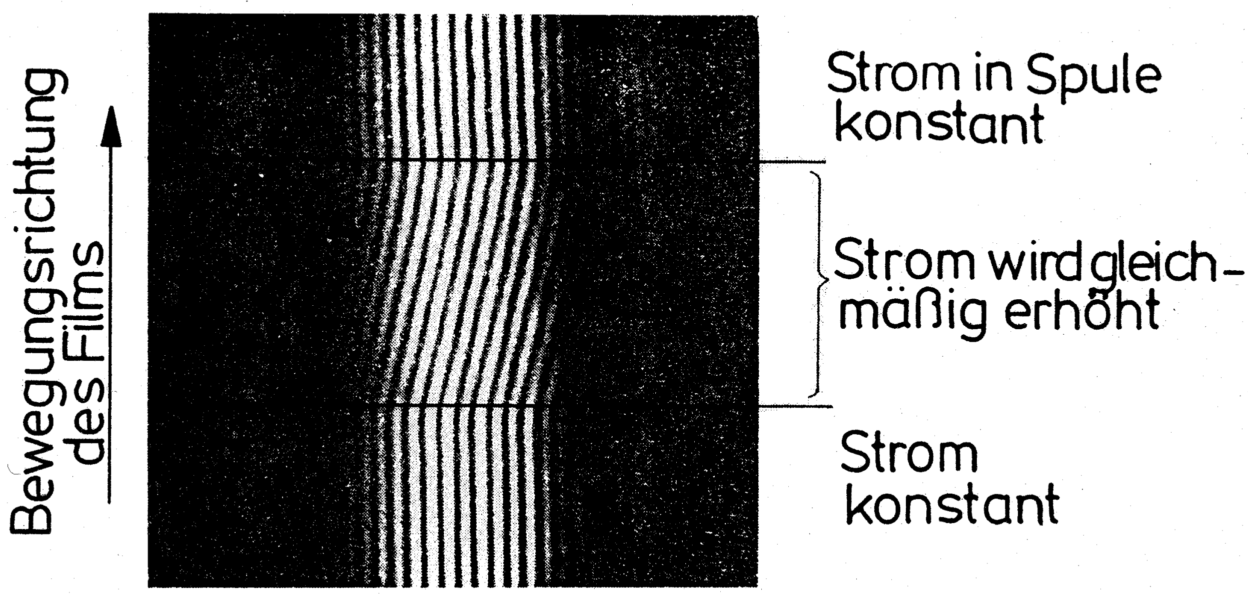
Experimentell wurden diese Überlegungen von Möllenstedt bestätigt: G. Möllenstedt, W. Bayh, Phys. Blätter 1962, S.299



Durch ändern des Spulenstroms kann man die Phasendifferenz und damit das Interferenzmuster kontinuierlich verändern.



Der Elektronstrahl wird durch einen metallisierten Quarzfaden, der sich auf negativem Potential befindet, in zwei kohärente Teilstrahlen aufgespaltet. Hinter dem ersten Quarzfaden wird eine Solenoidspule (14-18 μm Durchmesser) angebracht, die aus Wolframdraht von 4 μm Dicke gewickelt ist.



Ergebnis des Möllenstedt - Experiments
[G.Möllenstedt, W.Bayh, Phys.Blätter 1962, S.299]

Die Familie der Eichtransformationen

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha}$$

bildet eine unitäre, abelsche Gruppe $U(1)$.

1. unitär

$$UU^\dagger = e^{-i\alpha}e^{+i\alpha} = 1$$

2. abelsch

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = e^{-i\alpha_1}e^{-i\alpha_2} = e^{-i\alpha_2}e^{-i\alpha_1} = U(\alpha_2)U(\alpha_1)$$

3. abgeschloßen

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_1 + \alpha_2)$$

4. neutrales Element

$$U(0) = e^{-i0} = 1$$

5. inverses Element

$$U(\alpha)U(-\alpha) = e^{-i\alpha}e^{+i\alpha} = 1$$

6. Assoziativgesetz

$$U(\alpha_1)[U(\alpha_2)U(\alpha_3)] = [U(\alpha_1)U(\alpha_2)]U(\alpha_3)$$

Die Forderung von lokaler Eichinvarianz und die Wahl der Eichtgruppe $U(1)$ legen die Quantenelektrodynamik fest.

Dieses Konzept läßt sich verallgemeinern !

In der schachen Wechselwirkung: $SU(2)$

Dies ist die Gruppe aller unitären 2×2 Matrizen U mit Determinante 1:

$$UU^{\dagger} = 1, \quad detU = 1$$

Betrachten wir infinitesimale Transformationen,

$$U = 1 - i\xi$$

dann foglt aus $detU = 1$ Spur$\xi = 0$.
Es gibt genau drei linear unabhängige, hermitische 2×2-Matrizen mit Spur 0; z.B. die Pauli-Matrizen:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Man kann daher schreiben:

$$\xi = \frac{1}{2}(\epsilon_1\tau_1 + \epsilon_2\tau_2 + \epsilon_3\tau_3)$$

$$\Rightarrow U = 1 - \frac{1}{2}i\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}$$

Für einen endlichen "Drehwinkel" $(\vec{\epsilon} = \vec{\alpha}/n)$ gilt:

$$U = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2}i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}$$

Die Transformation

$$\Psi' = e^{-\frac{1}{2}i\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}}\Psi$$

stellt die Verallgemeinerung der Phasentransformation

$$\Psi' = e^{-i\alpha}\Psi$$

dar. Es gibt zwei Unterschiede:

1. Die Gruppe $SU(2)$ ist nicht abelsch
2. Es gibt drei Winkel: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

In der starken Wechselwirkung: $SU(3)$

Dies ist die Gruppe aller unitären 3×3 Matrizen U mit Determinante 1:

$$UU^{\dagger} = 1, \quad detU = 1$$

Es gibt genau acht linear unabhängige, hermitische 3×3-Matrizen mit Spur 0; z.B. die Gell-Mann-Matrizen λ_j.

Die Transformation

$$\Psi' = e^{-\frac{1}{2}i\sum_{j=1}^{8}\lambda_j\alpha_j}\Psi$$

stellt die Verallgemeinerung der Phasentransformation

$$\Psi' = e^{-i\alpha}\Psi$$

dar. Es gibt zwei Unterschiede:

1. Die Gruppe $SU(3)$ ist nicht abelsch
2. Es gibt acht Winkel α_j

Die Anzahl der linear unabhängigen Matrizen gibt die Anzahl der Austauschbosonen vor.

Zusammenfassung

$$\boxed{\widehat{\left(\frac{dF}{dt}\right)} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}]}$$

Hängt also der Operator $\hat{F}$ nicht explizit von der Zeit ab und ist $\hat{F}$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ vertauschbar, so ändert sich der zeitliche Mittelwert von $\hat{F}$ in einem beliebigen Zustand nicht.

Solche Größen sind Erhaltungsgrößen.

Symmertieüberlegungen führen zu Invarianzprinzipien und Erhaltungssätzen.

Dies stellt die Grundlage für viele Entwicklungen in der modernen Physik dar.

Die Forderung nach der Homogenität von Raum und Zeit

$$\begin{aligned} \hat{D}(\Delta\vec{x})\Psi(\vec{x}) &= \Psi(\vec{x}+\Delta\vec{x}) \;; \quad [\hat{D}, \hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{p}, \hat{H}] = 0 \\ \hat{T}(\Delta t)\Psi(t) &= \Psi(t+\Delta t) \quad ; \quad [\hat{T}, \hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{E}, \hat{H}] = 0 \end{aligned}$$

führen zur Impuls- und Energieerhaltung. Die Forderung nach der Isotropie des Raumes

$$\hat{R}(\Delta\phi)\Psi(\phi) = \Psi(\phi+\Delta\phi); \quad [\hat{R}, \hat{H}] = 0 \Leftrightarrow [\hat{J}_z, \hat{H}] = 0$$

führen zur Drehimpulserhaltung.

Das grundlegende Prinzip der modernen Teilchenphysik ist die lokale Eichinvarianz:

$$\Psi' = e^{-i\alpha(x)}\Psi$$

Die Eichgruppen des Standardmodells sind:

$U(1) \times SU(2)$	**für die elektroschwache Wechselwirkung,**
$SU(3)$	**für die starke Wechselwirkung.**

- **Die Gruppenstruktur legt die Wechselwirkungen zwischen Teilchen und Feldern fest.**
- **Wie wissen bis heute nicht warum gerade diese Eichgruppen die Natur beschreiben.**
- **Für diese Theorie haben Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg 1979 den Physik Nobelpreis erhalten.**
- **Die experimentellen Test der letzten 10 Jahre werden der Gegenstand der nächsten Vorlesungen sein.**